

Uwe Hassler

Zeitabhängige Volatilität und instationäre Zeitreihen

Zum Nobelpreis an Robert F. Engle und Clive W.J. Granger

Mit den diesjährigen Trägern des Nobelpreises für Wirtschaft, Robert F. Engle und Clive W.J. Granger, werden zwei Vertreter der Zeitreihenökonomie geehrt. Wie hat sich durch ihr Werk die statistische Analyse ökonomischer Zeitreihen verändert? Wie wird heute Volatilität auf Finanzmärkten analysiert?

Der diesjährige Nobelpreis für Wirtschaft geht in gewissem Sinne nach San Diego, wo Clive Granger und Robert Engle ein gutes Vierteljahrhundert lang als Professoren an der University of California wirkten. Der gebürtige Brite Clive Granger (Jahrgang 1934), der in Nottingham Mathematik studiert und einen Ph.D. in Statistik erworben hat, ließ sich 1974 am Department of Economics in San Diego nieder. Robert Engle (Jahrgang 1942) graduierte an der Cornell University in Physik, erwarb dort einen wirtschaftswissenschaftlichen Ph.D. und stieß ein Jahr später 1975 hinzu. Heute ist Granger Emeritus der University of California in San Diego, während Engle eine Professur an der Stern School of Business der New York University hat.

Die beiden Laureaten haben in den achtziger Jahren die Art, wie Ökonomen Zeitreihen analysieren, modellieren und vorhersagen, revolutioniert und einen Paradigmenwechsel in der Zeitreihenökonomie bewirkt. Engle wurde von dem Nobelkomitee für die Einführung und Entwicklung von Modellen mit zeitabhängiger bedingter Volatilität (ARCH) ausgezeichnet, Granger erhielt die Ehrung für die Schaffung eines Rahmens, der es erlaubt, Zusammenhänge zwischen instationären Variablen zu modellieren (Kointegration).

Auf den folgenden Seiten soll die überaus große Bedeutung dieser beiden Konzepte für Wissenschaft und Wirtschaft herausgearbeitet werden. Dabei wird der Fokus aber ganz auf den bahnbrechenden Beiträgen von Robert Engle und Clive Granger liegen. Es wird

also nicht versucht, einen ausgewogenen Überblick über diese beiden teilweise miteinander verwobenen Gebiete zu geben, so dass wichtige Leistungen anderer Autoren in der Nachfolge von Engle und Granger keine Würdigung erfahren. Da Volatilität mitunter auch als instationär (integriert) modelliert wird, beginnen wir mit dem Beitrag Grangers, um bei der Darstellung zeitabhängiger Volatilität darauf zurückgreifen zu können.

Ökonometrische Modellierung instationärer Zeitreihen

Die überwiegende Zahl ökonomischer Daten, die im Zeitverlauf anfallen, ist anerkanntermaßen instationär, und zwar trendbehaftet. Eine sehr frühe Arbeit, die darauf hinweist, ist von Granger selbst¹. Traditionellerweise modellierte man Instationarität bestenfalls durch deterministische Trends als zeitlich mehr oder minder stetig anwachsende Mittelwerte von Zeitreihen.

In den achtziger Jahren setzte sich aber die Erkenntnis durch, dass viele ökonomische Zeitreihen einem so genannten stochastischen Trend folgen, d.h. ihre Variabilität wächst mit der Zeit. Solche Zeitreihen nennt man integriert. Kointegration liegt nun vor, wenn mehrere integrierte Zeitreihen ein und demselben Trend folgen, oder allgemeiner, wenn ihnen mehrere gemeinsame Trends zugrunde liegen. Die statistische Inferenz, also die Grundlage statistischen Schätzens und Testens, ist bei integrierten Zeitreihen eine radikal andere als bei stationären Zeitreihen.

Obwohl Instationarität ökonomischer Zeitreihen wohl eher die Regel und nicht die Ausnahme ist, exis-

Prof. Dr. Uwe Hassler, 40, hat an der Goethe-Universität Frankfurt den Lehrstuhl für Statistik und Methoden der Ökonometrie inne.

¹ C.W.J. Granger: The Typical Spectral Shape of an Economic Variable, in: *Econometrica*, 34 (1966), S. 150-161.

tierte bis zu den Arbeiten von Granger keine Möglichkeit einer statistisch angemessenen ökonomischen Modellierung. Seit Anfang der neunziger Jahre jedoch ist wohl kein allgemein einführendes Lehrbuch zur Ökonometrie mehr erschienen, das nicht auch Kointegration behandelt.

Integrierte Zeitreihen

Eine Zeitreihe wird integriert genannt, wenn ihre Differenzen, d.h. die zeitlichen Zuwächse, stationär sind, oder richtiger: Wenn Differenzenbildung erforderlich ist, um Stationarität zu erlangen. Dabei bedeutet Stationarität anschaulich die Tendenz einer Zeitreihe, immer wieder zu einem festen Wert zurückzukehren. Das Niveau einer integrierten Zeitreihe in der laufenden Periode ist durch die Kumulation der stationären Differenzen aus den Vorperioden definiert. Eine integrierte Zeitreihe hat also gerade nicht die Tendenz, um ein bestimmtes Niveau nur zu schwanken, sondern sie driftet prinzipiell über jeden Wert hinaus. Ihre Varianz wächst im Zeitverlauf, was genau die Schwierigkeit bei der Prognose widerspiegelt: Im Grunde ist die beste Prognose für den Wert morgen die heutige Beobachtung, eben weil man sich keine bessere Vorstellung über den zukünftigen Verlauf machen kann.

Viele makroökonomische Reihen und auch Finanzzeitreihen wie Konsumausgaben, Wechselkurse, Zinsen oder Aktienkurse sind durch solches Verhalten in einer ersten Näherung ganz gut beschrieben, gegebenenfalls nach Logarithmierung. Allerdings bedeutet dies nun nicht, dass die Ökonomie eines Landes völlig willkürlich auseinander driftet. Selbstverständlich existieren Mechanismen, welche bestimmte ökonomische Variablen aneinander binden, so dass sie einen gewissen Gleichverlauf aufweisen, d.h. dass sie einem gemeinsamen Trend folgen.

Dies ist die Idee, die unter dem Begriff der Kointegration von Granger formalisiert wurde. Integrierte Zeitreihen, für die es eine Linearkombination gibt, welche stationär ist, heißen demgemäß kointegriert. Ökonomisch gesprochen existiert also eine langfristige Gleichgewichtsbeziehung zwischen instationären Variablen, und die Abweichungen von dieser Beziehung sind stationär, sie schwanken um Null.

Wenn wir beispielsweise die Konsumausgaben privater Haushalte und das Volkseinkommen als integriert betrachten, so gibt es doch eine Kombination der beiden Zeitreihen, nämlich die Ersparnis als Differenz von Einkommen und Ausgaben, welche stationär ist. Nun hat aber die Ersparnis der Vorperiode sicher einen Einfluss auf die Konsumausgaben der laufenden Periode

und möglicherweise ebenso auf das Volkseinkommen. In diesem Sinne driften die instationären Variablen nicht auseinander, sondern sie passen sich aufgrund von Gleichgewichtsabweichungen aus früheren Perioden an eine gleichgewichtige Beziehung an, wenn ein langfristiger, stabiler, ökonomischer Zusammenhang (Kointegration) besteht. Solche Anpassungsmechanismen wurden in der Literatur unter dem Schlagwort Fehlerkorrekturmodelle bekannt.

Fehlerkorrektur und Kausalität

Mit Grangers Repräsentationstheorem wird in der Literatur folgender Tatbestand bezeichnet: Das Vorliegen von Kointegration von zwei oder mehr Variablen ist gleichbedeutend damit, dass die Reihen durch ein Fehlerkorrekturmodell erzeugt werden. Fehlerkorrektur ist sozusagen die Kehrseite der Kointegrationsmedaille. Allerdings gab es schon 1978, bevor das Kointegrationskonzept aus der Taufe gehoben wurde, eine sehr einflussreiche empirische Studie, welche die Differenzen integrierter Konsumausgaben zu stationärer Ersparnis der Vorperiode im Rahmen eines Fehlerkorrekturmodells in Beziehung setzte². Ein Grund also, warum sich das Kointegrationskonzept erdrutschartig auf dem Gebiet der empirischen Wirtschaftsforschung durchsetzen konnte, war, dass hier rein technische, statistisch-zeitreihenanalytische Ansätze mit dem ökonomischen Gleichgewichtsgedanken in Verbindung gebracht wurden.

Kointegration mehrerer Zeitreihen impliziert wegen der dynamischen Fehlerkorrekturanpassung, dass die Vorhersagbarkeit einer Variablen sich durch Kenntnis der Vergangenheit der anderen Variablen verbessert. Dieses unter angewandten Ökonomen weit verbreitete Konzept der Prognoseverbesserung heißt allgemein Granger-Kausalität³. Es gilt also, dass bei zwei kointegrierten Reihen mindestens eine Granger-kausal für die andere ist. In Anbetracht des Umstandes, dass sich eine einzelne integrierte Zeitreihe ja nur sehr schwer, bzw. sehr ungenau, prognostizieren lässt, ist jede Verbesserung der Vorhersagbarkeit natürlich von offensichtlicher praktischer Relevanz. Speziell mit der Vorhersage in kointegrierten Systemen befasst sich eine Arbeit von Engle und Yoo⁴.

² J.E.H. Davidson, D.F. Hendry, F. Srba, S. Yeo: Econometric Modelling of the Aggregate Time-Series Relationship Between Consumers Expenditure and Income in the United Kingdom, in: *Economic Journal*, 88 (1978), S. 661-692.

³ Siehe C.W.J. Granger: Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods, in: *Econometrica*, 37 (1969), S. 424-438.

⁴ R.F. Engle, B.S. Yoo: Forecasting and Testing in Co-integrated Systems, in: *Journal of Econometrics*, 35 (1987), S. 143-159.

Das Kointegrationskonzept kam also nicht aus heiterem Himmel über die Wirtschaftswissenschaft, sondern fiel auf bereiteten Boden. Der Begriff samt mathematischer Ausformulierung wurde aber erst von Granger 1981 geprägt, von Granger 1986 popularisiert, und mit der Arbeit von Engle und Granger 1987 trat Kointegration einen unaufhaltsamen Siegeszug an⁵. Heute ist die in vielerlei Hinsicht verallgemeinerte und ausgebauten Kointegrationsmethodologie im Lehrgebäude angewandter Wirtschaftsforschung fest verankert.

Regressionen integrierter Zeitreihen

Die statistische Bedeutung von Kointegration wird vor dem Problem der Scheinregression ersichtlich (spurious regression). Diesen Ausdruck prägten Granger und Newbold in einer Arbeit⁶ von 1974 für den Umstand, dass zwischen integrierten Zeitreihen, die voneinander unabhängig sind, infolge der Instationarität künstlich statistisch signifikante Scheinzusammenhänge ausgewiesen werden. In einer Simulationsstudie quantifizierten Granger und Newbold die sehr hohe Wahrscheinlichkeit, zwischen unabhängigen integrierten Zeitreihen fälschlicherweise einen Zusammenhang zu diagnostizieren. Die Möglichkeit solcher Scheinregression erschütterte die empirische Wirtschaftswissenschaft. In einem Interview⁷ gibt Granger zum Besten, dass er bei einer Präsentation dieser Ergebnisse an der London School of Economics auf völligen Unglauben und den Verdacht eines Programmierfehlers stieß.

Nach der Publikation von Granger und Newbold gingen statistisch gewissenhafte Ökonomen dazu über, ihre Modelle mit den stationären Differenzen (Zuwächsen) der Zeitreihen zu schätzen, um die Gefahr von Scheinregressionen zu umgehen. Dies führte allerdings häufig zu insignifikanten und ökonomisch unplausiblen Parameterschätzwerten, weil eben der gleichgewichtige Zusammenhang ökonomischer Zeitreihen zwischen den Niveaus der Variablen besteht. Damit befand sich die Zeitreihenökonometrie in dem Dilemma, Scheinregression zwischen instationären Variablen zu riskieren oder aber insignifikante Resultate aus den Differenzen zu produzieren. Der Ausweg lautete Kointegration. Denn genau dann, wenn Koin-

tegration vorliegt, besteht bei einer Regression von Niveaus integrierter Variablen nicht die Gefahr einer Scheinregression.

Bei Vorliegen von Kointegration kann es also keine Scheinregression geben, was aber nicht bedeutet, dass die Standardergebnisse aus der Ökonometrie stationärer Zeitreihen gelten. Existiert nur genau eine und damit eindeutige Kointegrationsbeziehung zwischen integrierten Variablen, so weist die Kleinst-Quadrat-Regression einer Einzelgleichung der Niveaus sogar besonders schöne Eigenschaften auf. Seit der Arbeit von Engle und Granger aus dem Jahr 1987 ist bekannt, dass die Parameterschätzung schneller als bei stationären Variablen gegen den wahren Wert strebt (Superkonsistenz). Bemerkenswert ist dieses Ergebnis vor allem, weil es auch gilt, wenn der Störterm und die integrierten Regressoren korreliert sind. Insofern wurde die statische Kointegrationsregression als Triumph über den Haavelmo-(Endogenitäts-)Bias gefeiert: Trotz eventuell bestehender zeitgleicher Abhängigkeiten durch simultane Beziehungen zwischen mehreren Gleichungen kann im Einzelgleichungsansatz konsistent geschätzt werden. Dies kontrastiert vehement die Ergebnisse der stationären Standardökonometrie.

Allerdings haben diese Vorzüge ihren Preis, denn ohne weitere Modifikationen sind die Schätzer nicht asymptotisch normalverteilt. Dies bedeutet, dass die gewöhnlichen t-Statistiken nicht für Signifikanztests herangezogen werden können. Dennoch gelang es Engle und Granger in ihrem *Econometrica*-Artikel, eine einfache Forschungsstrategie aufzustellen. In Kürze lässt sich diese wie folgt zusammenfassen. Betrachte bei integrierten Zeitreihen eine Regression der Niveaus und teste aus den Residuen die Nullhypothese, dass Scheinregression vorliegt. Kann diese verworfen werden, so lässt sich mit eben diesen Residuen ein Fehlerkorrekturmodell aufstellen, in welchem der ökonomische Anpassungsmechanismus abgebildet wird. In einer Fehlerkorrekturgleichung aber tauchen nur noch stationäre Variablen auf, so dass die Standardinferenz aus den traditionellen Lehrbüchern Gültigkeit behält.

Erweiterungen

Es versteht sich von selbst, dass die Kointegrationsmethodologie zahlreiche Erweiterungen erfahren

⁵ C.W.J. Granger: Some Properties of Time Series Data and their Use in Econometric Model Specification, in: *Journal of Econometrics*, 16 (1981), S. 121-130; C.W.J. Granger: Developments in the Study of Co-integrated Economic Variables, in: *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 48 (1986), S. 213-228; R.F. Engle, C.W.J. Granger: Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing, in: *Econometrica*, 55 (1987), S. 251-276.

⁶ C.W.J. Granger, P. Newbold: Spurious Regressions in Econometrics, in: *Journal of Econometrics*, 2 (1974), S. 111-120.

⁷ The ET Interview: Professor Clive Granger, in: *Econometric Theory*, 13 (1997), S. 253-303.

hat. Die ohne Zweifel bedeutendste ist die multivariate Verallgemeinerung. Bei mehr als zwei integrierten Zeitreihen kann nämlich die Eindeutigkeit der Kointegrationsbeziehung verloren gehen, weil zwei oder mehr linear unabhängige Beziehungen existieren können. Dies sprengt den Einzelgleichungsansatz und erfordert eine multivariate Modellierung. Es ist heute Standard geworden, eine solche im Rahmen eines vektorautoregressiven (VAR) Modells vorzunehmen.

Granger war an einer Reihe anderer Erweiterungen beteiligt, von denen hier drei Erwähnung finden sollen. Granger und Joyeux⁸ betrachteten 1980 die Möglichkeit, dass ökonomische Zeitreihen zwischen klassischer Stationarität und der hier bislang unterstellten Integriertheit angesiedelt sind. Dann spricht man von fraktionaler Integration. Dabei handelt es sich um Zeitreihen, die zwar stationär sein können, aber sehr starke Persistenz und extrem weit in die Vergangenheit zurück reichende Autokorrelation aufweisen (Modelle mit langem Gedächtnis), so dass sie quasi lokale Trends aufweisen. Konsequenterweise zog Granger in der schon erwähnten Arbeit von 1981 auch fraktionale Kointegration in Erwägung.

Bei saisonalen Zeitreihen, sagen wir bei Quartalsdaten, kann es sein, dass die Differenzenbildung zum Vorquartal noch keine Stationarität liefert, sondern dass es erforderlich ist, Jahresdifferenzen zum Quartal des Vorjahres zu bilden, um Stationarität zu erhalten. Dann spricht man von saisonal integrierten Zeitreihen, und auch diese können kointegriert sein⁹.

Wieder eher ökonomisch motiviert ist das Konzept der Multikointegration¹⁰. Wenn wir das obige Beispiel von Konsum und Einkommen aufgreifen und wieder unterstellen, dass die Reihen integriert sind, die Ersparnis als Differenz aber stationär ist, dann ist das Gegenwartsvermögen als kumulierte Ersparnis der Vergangenheit definitionsgemäß wieder integriert. Und daher besteht statistisch die Möglichkeit einer zweiten, sicher nicht unplausiblen Kointegrationsbeziehung, nämlich zwischen den drei Variablen Konsum,

Einkommen und Vermögen.

Es ist müßig, die Bereiche aufzulisten, in denen empirische Kointegrationsanalysen mit Erfolg angewandt werden. Das universelle Phänomen der Instationarität ökonomischer Zeitreihen macht den herausragenden Stellenwert der Kointegrationsmethodologie aus.

Modellierung zeitabhängiger bedingter Varianzen

Obwohl die empirische Anwendung aus Engles Originalarbeit¹¹ im Jahre 1982 eine makroökonomische Zeitreihe betraf (Inflation), finden seine ARCH-Modelle insbesondere bei hochfrequenten Zeitreihen aus dem Finanzbereich Anwendung. Bei Finanzmarktzeihen beobachtet man nämlich, dass die Volatilität (oder Varianz) im Zeitverlauf stark schwankt: Aufgeregte Marktphasen mit extremen Ausschlägen wechseln sich mit eher ruhigen Perioden ab, die von moderaten Beobachtungen geprägt sind. Es treten also typischerweise Cluster von Volatilität auf. Dies ist insbesondere mit der Annahme normalverteilter Daten unvereinbar.

Obwohl solche Volatilitätscluster beispielsweise in Aktienrenditen schon in den sechziger Jahren beobachtet wurden, hielt die Zeitreihenanalyse und -ökonometrie am Modell von im Zeitverlauf konstanter Varianz fest. Engle brach in seiner Arbeit mit dieser Tradition und darf daher als Mitbegründer eines Forschungsbereichs gelten, der heute oftmals Finanzökonometrie genannt wird. Nur sehr wenigen Ökonomen ist es vergönnt zu erleben, was Engle widerfuhr: Dass ihre Entdeckung oder Erfindung innerhalb weniger Jahre nicht nur die Wissenschaft verändert, sondern auch die wirtschaftliche Praxis restlos durchdringt.

ARCH

Das englische Akronym ARCH steht für Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Mit Homoskedastizität bezeichnet man in der Ökonometrie eine der klassischen Annahmen des Regressionsmodells, nämlich dass die Varianz der Störterme zu jedem Zeitpunkt gleich ist (oder für jedes Individuum bei Querschnittsanalysen).

Von Heteroskedastizität ist nun die Rede, wenn die Annahme von Homoskedastizität nicht erfüllt ist. Allerdings schlug Engle kein Modell für die unbedingte Varianz vor, sondern für die bedingte (conditional), und zwar hängt die bedingte Varianz von der eigenen Vergangenheit der Zeitreihe ab, daher der Terminus „autoregressiv“. Damit ist die bedingte Varianz oder Volatilität einer Zeitreihe selbst eine zufällige Größe: Speziell in Engles ARCH-Modell ist die Varianz der

⁸ C.W.J. Granger, R. Joyeux: An Introduction to Long-Memory Time Series and Fractional Differencing, in: *Journal of Time Series Analysis*, 1 (1980), S. 15-29.

⁹ Siehe S. Hylleberg, R.F. Engle, C.W.J. Granger, B.S. Yeo: Seasonal Integration and Co-Integration, in: *Journal of Econometrics*, 44 (1990), S. 215-228.

¹⁰ C.W.J. Granger, T.W. Lee: Multicointegration, in: Th.B. Fomby, G.F. Rhodes (Hrsg.): *Co-Integration, Spurious Regressions, and Unit Roots*, in: *Advances in Econometrics*, Vol. 8, JAI Press (1990), S. 71-84.

¹¹ R.F. Engle: Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, in: *Econometri-*

laufenden Periode – gegeben die Zeitreihendaten bis zur Vorperiode – eine Funktion der quadrierten Beobachtungen der Vergangenheit.

Man beachte, dass dies gerade erlaubt, Volatilitätscluster abzubilden. War in der jüngeren Vergangenheit eher wenig Bewegung im Markt, d.h. waren dem Betrag nach eher geringe Ausschläge zu beobachten, so ist die bedingte Varianz heute klein, was wieder einen eher moderaten Ausschlag verursacht. Umgekehrt führen extreme positive oder negative Werte in den Vorperioden dazu, dass die bedingte Varianz der laufenden Periode groß wird, was wiederum eine eher extreme Beobachtung heute nach sich zieht.

Auch wenn wir von ARCH sprechen, so meinen wir dabei meistens GARCH, also verallgemeinerte (generalized) ARCH-Modelle. Diese wurden durch Tim Bollerslev¹², einen Doktoranden von Engle, eingeführt. Bei GARCH-Modellen hängt die bedingte Varianz von der Vergangenheit des Prozesses und zusätzlich von der eigenen Vergangenheit der Volatilität ab. Dies erlaubt in aller Regel eine sehr viele sparsamere Parametrisierung als das reine ARCH-Modell. Um die Bedeutung von (G)ARCH-Modellen nochmals hervorzuheben: Im Jubiläumsband (Nummer 100) des Journal of Econometrics wurde der Artikel von Bollerslev als zweit-erfolgreichste Arbeit dieser Zeitschrift bis zum Jahr 2001 gefeiert (Erfolg gemessen in Zitierhäufigkeit). Die erfolgreichste Arbeit war übrigens die oben schon erwähnte von Engle und Yoo über Vorhersagen kointegrierter Systeme.

Auf den ersten Blick mag es pedantisch erscheinen, immer von bedingter Varianz/Volatilität zu sprechen. Aber alles andere wäre falsch. Denn unter Voraussetzung bestimmter Parameterkonstellationen gilt, dass die unbedingte Varianz eines ARCH-Modells in der Tat stationär und mithin nicht zeitabhängig ist. Die für den in Dingen Statistik nicht so Routinierten möglicherweise mühsame Unterscheidung zwischen bedingter und unbedingter Varianz ist auch keine akademische Raffinesse. Der Praktiker ist vielmehr genau an der bedingten Volatilität interessiert, denn seine Vorstellungen von z.B. dem Risiko eines Wertpapiers in der Zukunft bildet er heute natürlich unter expliziter Berücksichtigung des Kursverlaufs in der Vergangenheit.

Risikomessung und –prognose

Die Schätzung von GARCH-Modellen stellt im Grunde eine theoriegeleitete Formalisierung dessen

dar, was Finanzanalysten schon immer versucht haben: eine Bestimmung des aktuellen Risikos z.B. einer Anlage aufgrund der Volatilität bei gegebenem kürzlich vergangenen Renditeverlauf. Vor Engles Arbeit schob man dazu ein Fenster fester Breite durch die Vergangenheit der Zeitreihe. Eine sinnvolle Fensterbreite waren 22 Tage bei täglichen Beobachtungen, weil dies in etwa der Zahl an Arbeitstagen in einem Monat entspricht. Also wurde für je aufeinander folgende 22 Tage rollierend die Varianz der Renditen durch die quadrierte Standardabweichung geschätzt. Eine solche Varianzschätzung basiert auf 22 quadrierten Vergangenheitswerten gewichtet mit identischen Gewichten.

Dieses Instrument zur Messung bedingter Volatilität wurde von Engle flexibilisiert. Bei ARCH-Modellen werden die Gewichte, mit denen die quadrierten Vergangenheitswerte versehen werden, nicht a priori konstant gesetzt, sondern vielmehr aus den Daten selbst geschätzt. Bei GARCH-Modellen wird trotz der sparsamen Parametrisierung sogar die gesamte Vergangenheit berücksichtigt, und zwar mit Gewichten, die geometrisch gegen Null streben: Je weiter zurück eine Beobachtung liegt, desto geringer ist ihr Einfluss auf die aktuelle Volatilität.

Die Notwendigkeit, über ein verlässliches Risikomaß zu verfügen, ist heute noch viel größer als vor 20 Jahren. Erstens ist das Handelsvolumen von Optionen und ähnlichen Finanzderivaten sprunghaft angestiegen. Der Preis oder Wert einer Option aber hängt von der Volatilität des zugrunde liegenden Wertpapiers ab. Zweitens legen die Vereinbarungen des Baseler Ausschusses zur Bankenaufsicht fest, dass Banken und Finanzunternehmen ein Vielfaches ihres „Value at Risk“ (VaR) an Eigenkapital bereit halten müssen, wobei es sich um den mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit über einen bestimmten Zeitraum zu erwartenden Mindestverlust handelt. Ein solcher VaR-Wert ist also explizit auf die Zukunft ausgerichtet und erfordert Volatilitätsprognosen, die heute oft auf GARCH-Modellen beruhen. Einen ganz aktuellen Überblick über den Forschungsstand auf dem Gebiet von Volatilitätsvorhersagen leisten Poon und Granger¹³.

Serielle Abhängigkeit über die Volatilität

Nehmen wir als Beispiel wieder die Rendite einer Aktie. Gemäß der Effizienzmarkthypothese ist die beste Vorhersage für die morgige Rendite der Wert heute, weil der morgige Wert mit dem heutigen nicht korreliert

¹² T. Bollerslev: Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, in: Journal of Econometrics, 31 (1986), S. 307-327.

¹³ S.-H. Poon, C.W.J. Granger: Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review, in: Journal of Economic Literature, 41 (2003), S. 478-539.

ist. Laut der Effizienzmarkthypothese sind Preisveränderungen nicht vorhersagbar. Aber deswegen muss der morgige Wert noch lange nicht stochastisch unabhängig vom heutigen sein. Wenn die Rendite nämlich durch einen ARCH- oder GARCH-Prozess erzeugt wird, so ist die quadrierte Rendite morgen mit der quadrierten Rendite von heute korreliert. Obwohl also im Niveau der Renditen keine Korrelation vorliegt, hängen die Renditen doch über die Quadrate zusammen. Dies rührt daher, dass die bedingte Volatilität morgen vom Quadrat der heutigen Rendite abhängt und dass die morgige Volatilität ihrerseits für den Ausschlag der Rendite morgen verantwortlich ist.

Diese Korrelation der Quadrate oder der bedingten Volatilität bedeutet für Vorhersagen: Auch wenn die beste Punktprognose für morgen der Wert heute ist, so variiert doch das Prognoseintervall, also das heute prognostizierte Intervall, in dem der Wert morgen mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit liegt. Sprich: Die Modellierung von ARCH-Effekten führt durchaus auch auf effizienten Finanzmärkten zu einer Prognoseverbesserung, auch wenn sich diese nur in der Breite von Prognoseintervallen niederschlägt.

In Anbetracht der seriellen Abhängigkeit einer ARCH-Zeitreihe via Volatilität ist es nicht überraschend, dass sich das ARCH-Modell als autoregressives (AR) Modell der quadrierten Daten reparametrisieren lässt. Und ein GARCH-Modell besitzt eine Repräsentation als autoregressives Moving-Average-Modell (ARMA) in den Quadraten. Dieser Umstand, dass die neuen (G)ARCH-Modelle dann doch recht vertraut als AR(MA)-Modelle in den Quadraten geschrieben werden konnten, hat sicherlich wesentlich zu ihrer weiten Verbreitung und theoretischen Akzeptanz beigetragen. Überdies war damit vorgezeichnet, wie man GARCH-Modelle verallgemeinern konnte, nämlich genau so, wie die herkömmlichen ARMA-Modelle verallgemeinert worden waren.

Nachdem oben integrierte Zeitreihen behandelt wurden, ist es vielleicht nicht überraschend, dass es auch integrierte GARCH-Modelle¹⁴ gibt, welche die Volatilität als instationären Prozess abbilden (man spricht dann auch von IGARCH). Auch die Idee fraktionaler Integration (langes Gedächtnis) wurde auf die GARCH-Literatur übertragen, um Volatilitäten zu modellieren, die möglicherweise stationär sind, aber sehr

starke Persistenz aufweisen¹⁵.

GARCH-Effekte werden nicht nur bei einzelnen Finanzreihen beobachtet, sondern auch in Residuen von Regressionsmodellen. Sind diese Residuen nicht homoskedastisch, so hat herkömmliche Inferenz über die Steigungsparameter keine Gültigkeit. Also ist es heute Routine geworden, bei der Misspezifikationsanalyse von Regressionsmodellen die Residuen auch auf ARCH zu testen. Ein entsprechender Lagrange-Multiplikatoren-Test, der auf einer einfachen Hilfsregression der quadrierten Residuen basiert, wurde schon in der Originalarbeit von Engle vorgeschlagen. Wird ARCH diagnostiziert, so erlaubt heute jede gängige Software, eine Maximum-Likelihood-Schätzung der (G)ARCH-Parameter vorzunehmen.

Anwendungen und Erweiterungen

Drei Anwendungen von GARCH wurden schon erwähnt: Verbesserte Prognoseintervalle auf effizienten Märkten; korrekt spezifizierte Regressionsresiduen und gültige statistische Inferenz im Regressionsmodell; und Risikomessung und Risikovorhersagen zum Beispiel für die Optionspreisbestimmung. Aber nicht nur Optionspreise hängen von der Volatilität des zugrunde liegenden Papiers ab, sondern auch der Preis eines Wertpapiers selbst kann als Funktion seiner Varianz gesehen werden. Denn bei einem riskanteren Wertpapier wird eine im Mittel höhere Rendite erwartet. Darin bestand die Motivation zur Ausformulierung so genannter ARCH-in-mean-Modelle (ARCH-M)¹⁶.

Allerdings spielt für den Preis nicht nur die eigene Volatilität eine Rolle, sondern auch die Kovarianz mit einem Marktportfolio. Der Wunsch, solche Zusammenhänge abzubilden, führte auf wesentlich kompliziertere Modelle, nämlich auf eine multivariate Modellierung von GARCH-Effekten¹⁷.

Es ist sicher nicht übertrieben, von einer wahren Flut weiterer Verallgemeinerungen und Varianten des (G)ARCH-Modells zu reden. Die meisten zeichnen sich durch mehr oder minder ansprechende Akronyme aus, denen Engle, als er nach 20 Jahren ARCH Bilanz zog und Ausschau hielt¹⁸, ein weiteres hinzufügte, nämlich YAARCH: Yet Another ARCH.

¹⁴ R.F. Engle, T. Bollerslev: Modeling the Persistence of Conditional Variances, in: *Econometric Reviews*, (1986), S. 1-50.

¹⁵ Z. Ding, C.W.J. Granger, R.F. Engle: A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model, in: *Journal of Empirical Finance*, 1 (1993), S. 83-106.

¹⁶ R.F. Engle, D.M. Lilien, R.P. Robins: Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure, in: *Econometrica*, 55 (1987), S. 391-407.

¹⁷ R.F. Engle, K.F. Kroner: Multivariate Simultaneous Generalized ARCH, in: *Econometric Theory*, 11 (1995), S. 122-150.

¹⁸ R.F. Engle: New Frontiers for ARCH Models, in: *Journal of Applied Econometrics*, 17 (2002), S. 425-446.